KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: Stereometrie

Zusammengestellt von
Bruno Wyrsch, Michael Güntensperger (KS Seetal; Zylinder, Kugel und Kegel)
Guido Köpfli und Fabian Glötzner (KS Schüpfheim/Gymnasium Plus; Quader, Prisma, Pyramide, zusammengesetzte Aufgaben)

Inhaltsverzeichnis

Lernziele zu geradlinig begrenzten Körpern:

- Sie bestimmen Volumen und Oberfläche von Pyramiden, Prismen und Quadern aus Angaben von Seitenlängen bzw. Radien.
- Sie lösen Formeln zur Oberflächen-, Mantel- und Volumenberechnung nach beliebigen Grössen auf und berechnen diese Grössen.
- Sie erläutern die Herleitung und den Aufbau der Formeln zur Oberflächen-, Mantel- und Volumenberechnung.
- Sie entwickeln Formeln für spezielle Körper (z.B. Tetraeder) durch Herleitung aus bekannten Formeln.
- Sie skizzieren Körper perspektivisch sinnvoll und korrekt.
- Sie berechnen Oberfläche und Volumen von Körpern, indem Sie sie in mehrere bekannte Teilkörper zerlegen.
- Sie benennen und beschreiben die fünf Platonischen Körper.

Grundwissen

- Sie wenden die Formeln zur Berechnung der Höhe und der Fläche im gleichseitigen Dreieck an.
- Sie rechnen Raum- und Hohlmasse ineinander um.
- Sie wenden das Archimedische Prinzip an.

Lernziele zu Zylinder, Kugel und Kegel:

- Sie können die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen von zylindrischen Körpern anwenden.
- Sie können die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen von kegelartigen Körpern anwenden.
- Sie können die Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen von Kugeln anwenden.
- Sie können den relativen und absoluten Fehler von Messgrössen berechnen.

Kantonale Fachschaft Mathematik

Aufgaben zu Quader, Prisma und Pyramide

Aufgabe 1

Ein regelmässiges sechseckiges Prisma hat eine Grundkantenlänge a=4cm und eine Körperhöhe h=9cm. Berechne Volumen und Oberfläche dieses Körpers.

Aufgabe 2

Eine grosse Wanne ist vollständig mit Wasser gefüllt. Nun wird ein Holzwürfel von 15cm Kantenlänge (Dichte 0,4g/cm^3) sorgfältig in diese Wanne gelegt. Wie viele Milliliter Wasser werden dabei überlaufen?

Aufgabe 3

a) Ein Tetraeder (Pyramide aus vier gleichseitigen Dreiecken) besitzt eine Kantenlänge a = 5cm. Berechne die Oberfläche dieses Tetraeders.

b) Zeige durch allgemeine Herleitung wie man auf die Volumenformel $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$ für das Tetraeder kommt, wenn die Kantenlänge mit a bezeichnet wird.

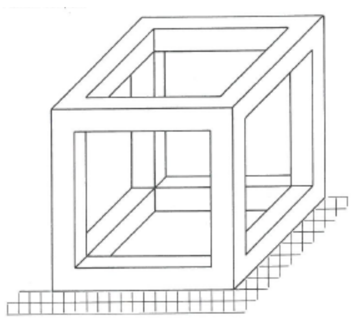
Aufgabe 4

a) Berechne das Volumen und die Oberfläche einer regelmässigen quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge a=7cm und der Körperhöhe h=25cm.

b) Berechne das Volumen und die Oberfläche einer regelmässig quadratischen Pyramide allgemein, wenn die Grundkantenlänge a und die Körperhöhe das Vierfache der Grundkante beträgt.

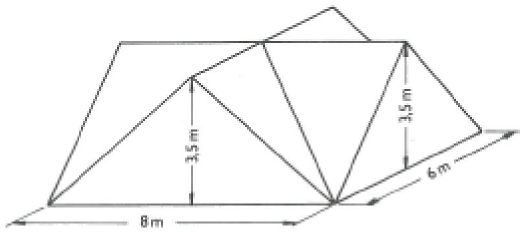
Aufgabe 5

Dieser würfelförmige Körper mit 8cm Aussenkantenlänge ist aus Profilstäben mit quadratischem Querschnitt (Seitenlänge 1,2cm) hergestellt. Welche Masse besitzt er, wenn das Material eine Dichte von 2,7g/cm^3 aufweist?



Aufgabe 6

Ein Hausdach besteht geometrisch betrachtet aus zwei geraden Prismen, welche sich schneiden. Berechne das Volumen des darunterliegenden Dachstuhls und die mit Ziegeln bedeckte Dachfläche.



Aufgabe 7

Ein v-förmiger Kanal mit symmetrischem Querschnitt besitzt eine Breite von 4m und eine Tiefe von 2,5m. Welche Fläche von Betonplatten sind zur Auskleidung dieses Kanals pro 10m Länge notwendig?

Aufgabe 8

Löse die Oberflächenformel $A = 2(ab + ac + bc)$ eines Quaders mit den Kanten a, b und c nach der Seite a auf.

Aufgabe 9

Zwei Würfel aus Knetmasse haben die Kantenlängen a=5cm beziehungsweise b=9cm. Jetzt wird daraus ein einziger Würfel geformt. Welche Kantenlänge besitzt dieser?

Musterlösungen zu den Aufgaben zu Quader, Prisma, Pyramide

Aufgabe 1

$V = G\cdot h = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^2\cdot\sqrt{3}\cdot 9 = 216\sqrt{3} \approx \underline{\underline{374{,}12\left[cm^3\right]}}$

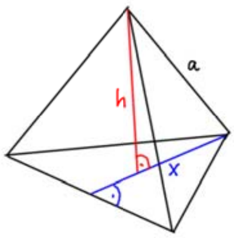
$O = 2\cdot G + 6\cdot ah = 12\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^2\cdot\sqrt{3} + 6\cdot 4\cdot 9 = 48\sqrt{3} + 216 \approx \underline{\underline{299{,}14\left[cm^2\right]}}$

Aufgabe 2

$M = 15^3\cdot 0{,}4 = \underline{\underline{1350\left[g\right]}}$

$V = 1350\,cm^3 = 1350\,ml = \underline{\underline{1{,}35\,l}}$

Aufgabe 3



a) $O = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot 5^2\cdot\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \approx \underline{\underline{43{,}30\left[cm^3\right]}}$

b) $x = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot a$

$h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{9}a^2\cdot 3} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,a$

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{18}}{36}a^3 = \frac{3\sqrt{2}}{36}a^3 = \underline{\underline{\frac{1}{12}\sqrt{2}\,a^3}}$

Aufgabe 4

a) $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\cdot 49\cdot 25 \approx \underline{\underline{408{,}33\left[cm^3\right]}}$

$h' = \sqrt{25^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{637{,}25} \approx 25{,}24\left[cm\right]$

$O = G + 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot h' \approx \underline{\underline{402{,}41\left[cm^2\right]}}$

b) $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 4a = \underline{\underline{\frac{4}{3}a^3}}$

$O = G + 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot h' = a^2 + 2a\cdot\sqrt{(4a)^2 + (\frac{a}{2})^2} = a^2 + 2a\cdot\sqrt{16{,}25a^2} = a^2 + 2a\cdot\sqrt{16{,}25}\cdot a$

$= a^2 + \sqrt{4}\cdot\sqrt{16{,}25}\cdot a^2 = a^2 + \sqrt{65}\cdot a^2 = \underline{\underline{\left(1+\sqrt{65}\right)a^2}}$

Aufgabe 5

$V = 8^3 - (8-2\cdot 1{,}2)^3 - 6\cdot(8-2\cdot 1{,}2)^2\cdot 1{,}2 = 8^3 - 5{,}6^3 - 6\cdot 5{,}6^2\cdot 1{,}2 \approx \underline{\underline{110{,}6\left[cm^3\right]}}$

Aufgabe 6

$V = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3{,}5\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3{,}5\cdot 8 - \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 8\cdot 3{,}5 = \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 6\cdot 8\cdot 3{,}5 = \frac{2}{3}\cdot 168 = \underline{\underline{112\left[m^3\right]}}$

$A = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2}\cdot\sqrt{3{,}5^2 + (\frac{8}{2})^2} + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{2}\cdot\sqrt{3{,}5^2 + (\frac{6}{2})^2} = 6\cdot\sqrt{3{,}5^2 + 4^2} + 8\cdot\sqrt{3{,}5^2 + 3^2} \approx \underline{\underline{68{,}77\left[m^2\right]}}$

Aufgabe 7

$A = 2\cdot\sqrt{(\frac{4}{2})^2 + 2{,}5^2}\cdot 10 = 2\cdot\sqrt{10{,}25}\cdot 10 = 10\sqrt{41} \approx \underline{\underline{64{,}03\left[m^2\right]}}$

Aufgabe 8

$A = 2(ab + ac + bc)\ ;\quad A = 2ab + 2ac + 2bc\ ;\quad A - 2bc = 2a(b+c)$

$\frac{A-2bc}{2(b+c)} = a$

Aufgabe 9

$c = \sqrt[3]{a^3 + b^3} = \sqrt[3]{125 + 729} = \sqrt[3]{854} \approx 9{,}49\left[cm\right]$

Zylinderaufgaben

1) Berechne den Inhalt des Mantel und der Oberfläche und das Volumen eines geraden Kreiszylinders, wenn gegeben sind (Runde auf zwei Nachkommastelle):
   a) r = 7 cm, h = 12 cm
   b) V = 56.55 m^3, h = 8 m

2) Auf einem Messzylinder sollen Markierungsstriche für 1cl angeben werden. Wie weit müssen diese Striche auseinander sein, wenn der innere Durchmesser des Zylinders 30mm beträgt. (Runde auf eine Nachkommastelle)

3) Eine Datenleitung besteht aus 3 Glasfaserkabeln von je 0.4dm Durchmesser. Wie viel Tonnen wiegen 10km Leitung, wenn die Dichte eines Glasfaserkabels 2.58g/cm^3 beträgt.

4) Wie dick muss ein Kupferdraht von der Dichte 8.9 g/cm^3 sein, damit ein Stück von 1cm Länge 5g wiegt.

5) Der Grimselstausee fasst rund 100 Millionen m^3 Wasser. In wie vielen Tagen entleert ihn der zylindrische Ableitungsstollen in den Gelmersee, wenn dieser Stollen im Durchmesser 2.6m misst? Das Wasser fliesst mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 3m/s ab.

6) Absoluter und relativer Fehler bei Messgrössen
   Sie wollen das Volumen eines geraden Kreiszylinders (z.B. eine Ovomaltinebüchse) berechnen. Bei ihrer Messung können Sie die beiden Grössen auf 0.2cm genau messen. Sie erhalten für den Radius $r = 2.4 \pm 0.2cm$ und für die Höhe $h = 5.0 \pm 0.2cm$.
   a) Berechne den absoluten Fehler (die absolute Messunsicherheit) für das Volumen des Körpers auf zwei geltende Ziffern genau (geltende Ziffern heisst: z.B. 93.8cm=94cm)
   b) Wie viel beträgt der relative Fehler für den Radius r, für die Höhe h und für das Volumen V?
   c) Wie lauten die Rechenregeln für das Multiplizieren/Dividieren von mehreren Messgrössen, die mit Messunsicherheiten behaftet sind?

Lösungen Zylinderaufgaben

1) *a) M = 527.79 cm^2, O = 835.67 cm^2 , V = 1847.26 cm^3*
   b) r = 1.5m, M = 75.40 cm^2 , O = 89.54 cm^2
2) *Die Messstriche sind 14.1 mm auseinander.*
3) *Das Kabel wiegt 389.05 t.*
4) *Das Stück müsste 0.85 cm dick sein.*
5) *Die Entleerung würde 73 Tage (72.66 Tage) dauern.*
6) *a) Der absolute Fehler F beträgt 18.5cm^3.*
   b) Die relativen Fehler f betragen f_{Radius}=8.33%, $f_{Höhe}$ = 4%, $f_{Volumen}$=20.56%
   c) Die relativen Fehler der einzelnen Messgrössen werden addiert!

Musterlösungen Zylinderaufgaben

1a)

$$M_{Zylinder} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$
$$M_{Zylinder} = 2 \cdot 7 \cdot \pi \cdot 12$$
$$M_{Zylinder} = 168\pi$$
$$\underline{\underline{M_{Zylinder} = 527.79\ cm^2}}$$

$$O_{Zylinder} = M_{Zylinder} + 2 \cdot A_{Grundfläche}$$
$$O_{Zylinder} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + 2 \cdot r^2 \cdot \pi$$
$$O_{Zylinder} = 168\pi + 2 \cdot 7^2 \cdot \pi$$
$$O_{Zylinder} = 168\pi + 98\pi$$
$$O_{Zylinder} = 266\pi$$
$$\underline{\underline{O_{Zylinder} = 835.66\, cm^2}}$$

$$V_{Zylinder} = A_{Grundfläche} \cdot h$$
$$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V_{Zylinder} = 7^2 \cdot \pi \cdot 12$$
$$V_{Zylinder} = 588\pi$$
$$\underline{\underline{V_{Zylinder} = 1847.26\, cm^3}}$$

1b)

$$V_{Zylinder} = A_{Grundfläche} \cdot h$$
$$A_{Grundfläche} = \frac{V_{Zylinder}}{h}$$
$$A_{Grundfläche} = \frac{56.55}{8}$$
$$A_{Grundfläche} = 7.06875\, cm^2$$
$$\underline{A_{Grundfläche} = 7.07\, cm^2}$$

$$A_{Grundfläche} = r^2\pi$$
$$r^2 = \frac{A_{Grundfläche}}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{A_{Grundfläche}}{\pi}}$$
$$r = \sqrt{\frac{7.07}{\pi}}$$
$$\underline{r = 1.50\,\mathrm{cm}}$$

$$M_{Zylinder} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$
$$M_{Zylinder} = 2 \cdot 1.50 \cdot \pi \cdot 8$$
$$M_{Zylinder} = 24\pi$$
$$\underline{\underline{M_{Zylinder} = 75.40\ cm^2}}$$

$$O_{Zylinder} = M_{Zylinder} + 2 \cdot A_{Grundfläche}$$
$$O_{Zylinder} = 24\pi + 2 \cdot 7.07$$
$$\underline{\underline{O_{Zylinder} = 89.54\, cm^2}}$$

2) Die Messstriche sind 14.1 mm auseinander.

3)

$$V_{Leitung} = A_{Grundfläche} \cdot h$$
$$V_{Leitung} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V_{Leitung} = 0.4^2 \cdot \pi \cdot 100'000$$
$$V_{Leitung} = 16'000\pi$$
$$\underline{V_{Leitung} = 50265.48\, dm^3}$$

$$3 \cdot V_{Leitung} = 150'796.45\, dm^3$$
$$\underline{V_{Alle\ Leitungen} = 150'796'447.37\, cm^3}$$

$$Masse = Dichte \cdot Volumen$$
$$m = \rho \cdot V$$
$$m = 2.58 \cdot 150'796'447.37$$
$$m = 389054834.22\, g$$
$$\underline{\underline{m = 389.05\, t}}$$

Die Kabel wiegen 389.05 Tonnen.

4) Das Stück müsste 0.85 cm dick sein.

5) Die Entleerung würde 73 Tage (72.66 Tage) dauern.

6a) *Im ungünstigsten Fall ergibt sich das minimale / maximale Volumen wie folgt:*

$$V_{min} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2.2^2 \cdot \pi \cdot 4.8\ cm^3 = 72.99\ cm^3 = 73\ cm^3$$

$$V_{max} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2.6^2 \cdot \pi \cdot 5.2\ cm^3 = 110.43\ cm^3 = 110\ cm^3$$

$$V_{mittel} = 2.4^2 \cdot \pi \cdot 5\ cm^3 = 90.48\ cm^3 = 90\ cm^3$$

$\Rightarrow$ *der Wert für das Volumen kann zwischen 73cm und 110 liegen (Differenz 37* cm^3 *).*

$\Rightarrow$ *das Volumen des Zylinders beträgt somit* $V = 90\ cm^3 \pm 18.5\ cm^3$.

Die absolute Messunsicherheit von 18.5 cm^3 *hat also einen Anteil von 20.56% an den 90* cm^3.

6b) *der relative Fehler f für den Radius r, die Höhe h und das Volumen ergibt sich:*

$$f_{Radius\ r} = \frac{F}{r} = \frac{0.2}{2.4} = 8.33\%$$

$$f_{Höhe\ h} = \frac{F}{h} = \frac{0.2}{5} = 4\%$$

$$f_{Volumen\ V} = \frac{F}{V} = \frac{18.5}{90} = 20.56\%$$

Um den relativen Fehler für die Volumenberechnung zu berechnen geht man wie folgt vor:

$$f_{Volumen\ V} = 2 \cdot 8.33\%\ (rel.\ Fehler\ von\ r\ im\ Quadrat!) + 4\%\ (rel.\ Fehler\ von\ h) = 20.66\%$$

Der Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen 20.56% und 20.66%
ergibt sich durch Rundungsdifferenzen bei der Berechnung des aboluten Fehlers.

6c) *Um das Volumen V des Zylinders zu berechnen, müssen die Messgrössen „Radius r" und „Höhe h" multipliziert werden. Um die Messunsicherheit des Volumens bestimmen zu können, braucht man folgende Rechenregeln:*
$\Rightarrow$*"Bei der Multiplikation und Division von mehreren Messgrössen werden die relativen Fehler der einzelnen Messgrössen addiert!"*

$$f_{Volumen\ V} = f_{Radius\ r} + f_{Radius\ r} + f_{Höhe\ h}$$

Kegelaufgaben

1) Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen der folgenden Kreiskegel:
   a) r=5 cm, h=16cm
   b) r=6cm, s=10cm

2) Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a=15cm und b=8cm rotiert um die Kathete a. Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des entstandenen Kegels!

3) Eine Sanduhr in Gestalt eines Doppelkegels ist soeben umgedreht worden. Aller Sand befindet sich wieder im oberen Teil und hat dort selbst die Gestalt eines geraden Kreiskegels mit Grundkreisradius r=4.2cm und Höhe h=10cm. Der Sand rinnt nun gleichmässig nach unten, und nach einiger Zeit hat die Höhe des oben befindlichen Sandkegels um 3 cm abgenommen.
   a) Wie viele cm^3 Sand sind in der Sanduhr?
   b) Wie viele cm^3 Sand sind bereits hinuntergerieselt?
   c) Wie viele Minuten sind verstrichen, während denen die Höhe des Sandkegels um jene 3cm zurückging, wenn die ganze Sandmenge in einer Stunde nach unten rinnt?

4) Ein gerader Kreiskegel hat einen Radius r=10cm. Der aufgerollte Mantel bildet einen Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 135°.
   a) Berechne den Inhalt des Mantels und die Oberfläche des Kegels!
   b) Drücke den Inhalt des Mantels mit Hilfe von r aus!

Lösungen Kegelaufgaben

1) a) s=16.76cm, $M = \pi \cdot r \cdot s = 263.31cm^2$, $O = \pi \cdot r \cdot s + r^2\pi = 341.85cm^2$, $V=48.88cm^3$
b) h=8cm, $M = 188.50cm^2$, $O = 301.59cm^2$, $V = 301.59cm^3$

2) r=8cm, h=15cm, s=17cm, $M = 427.26\ cm^2$, $O = 628.32cm^2$, $V = 1005.31cm^3$.

3) a) $V=184.73cm^3$,
b) $dV=V-V'=184.73cm^3-63.36\ cm^3=121.37\ cm^3$; mit r'=2.94cm (Strahlensatz)
c) Annahme: gleichmässiger Durchgang des Sandes pro Minute:
$dV/min=184.73\ cm^3 / 60min = 3.08\ cm^3 /min$
Zeitdauer $t= dV / (dV/min) = 184.73\ cm^3 / 3.08\ cm^3 /min = 39.42min$

4) *a) Schneidet man den Kegel entlang seiner Mantellinie s auf und rollt ihn auf eine Ebene ab, so entsteht der Kreissektor mit Radius s und Zentriwinkel 135°. Die Bogenlänge b des Kreissektors ist $b = 2 \cdot \pi \cdot r$. Würde der Kreissektor zu einem ganzen Kreis ergänzt, hätte der Kreisumfang den Betrag $U = 2 \cdot \pi \cdot s$.*

$$\frac{b}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot s} = \frac{r}{s} = \frac{135°}{360°} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow s = r \cdot \frac{8}{3} = 10 \cdot \frac{8}{3} = 26.67cm$$

$$M = \pi \cdot r \cdot s = 837.76\ cm^2, \quad O = r^2 \cdot \pi + M = 314.16\ cm^2 + 837.76\ cm^2 = 1151.92\ cm^2,$$

b) $M = \pi \cdot r \cdot \frac{8 \cdot r}{3} = \frac{8 \cdot \pi \cdot r^2}{3}$

Kugelaufgaben

1) Berechne Volumen und Oberflächeninhalt einer Kugel mit Umfang u = 60 mm.

2) Berechne Umfang und Oberflächeninhalt einer Kugel mit Volumen V = 1 m^3.

3) Das Planetarium in Verkehrshaus Luzern hat eine halbkugelförmige Kuppel, deren Grundfläche 250 m^2 misst. Die Kuppel muss neu mit einer Speziallackierung gestrichen werden. Wie viel m^2 müssen gestrichen werden?

4) Wie viel Gramm wiegt eine Hohlkugel aus Gold (Dichte 19.29 g/cm^3) mit einem Aussendurchmesser von 32mm und einem Innendurchmesser von 20mm.

5) Eine Hohlkugel aus Zinn mit 22mm Wandstärke und 180mm Aussendurchmesser soll zu einer Kugel umgegossen werden. Berechne den Durchmesser der Kugel.

6) Statt eines grossen Gasballons mit einem Fassungsvermögen von 600m^3 sollen aus der gleichen Menge Ballonseide sechs kleinere Ballone hergestellt werden. Wie viel Gas braucht es, um alle kleinen Ballone zu füllen.

7) Fünf sehr zerbrechliche Glaskugeln mit Durchmesser d = 48mm sollen in einer zylinderförmigen Kartonröhre transportiert werden. Diese Röhre ist mit Schaumstoff ausgekleidet. Der Abstand von der Kugel zur Röhre beträgt 5mm; der Abstand zwischen zwei Kugeln ist doppelt so gross. Berechne die Kartonmenge und die Schaumstoffmenge.

8) Ein Sportartikelhersteller möchte in China eine 5kg schwere Hantel aus Grauguss (Dichte 7.2 kg/dm^3) herstellen lassen. Die Gewichte sollen die Form einer Kugel haben. Wie dick wird das Verbindungsstück?

Lösungen Kugelaufgaben

1) *$O = 1144.91\ mm^2$, $V = 3647.56\ mm^3$*
2) *$u = 3.9$ m, $O = 4.83\ m^3$*
3) *$O = 500\ m^2$*
4) *Die Masse beträgt 250.16 g.*
5) *d = 149.13 mm*
6) *$V = 244.95\ m^3$ (r = 5.23 m eines kleinen Ballons)*
7) *Kartonmenge = 52841.59 mm^2; Schaumstoffmenge 476673.85 mm^3*
8) *d = 4.48 cm*

Musterlösungen Kugelaufgaben

1)

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi$$
$$r = \frac{u}{(2 \cdot \pi)}$$
$$r = \frac{60}{(2 \cdot \pi)}$$
$$\underline{r = 9.55\ mm}$$

$$O_{Kugel} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$
$$O_{Kugel} = 4 \cdot 9.55^2 \cdot \pi$$
$$\underline{\underline{O_{Kugel} = 1145.92\, mm^2}}$$

$$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$
$$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot 9.55^3 \cdot \pi}{3}$$
$$\underline{\underline{V_{Kugel} = 3647.56\, mm^3}}$$

2)

$$V_{Kugel} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$
$$3 \cdot V_{Kugel} = 4 \cdot r^3 \cdot \pi$$
$$r^3 = \frac{3 \cdot V_{Kugel}}{(4 \cdot \pi)}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{Kugel}}{(4 \cdot \pi)}}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1}{(4 \cdot \pi)}}$$
$$\underline{r = 0.62\ m}$$

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi$$
$$u = 2 \cdot 0.62 \cdot \pi$$
$$\underline{\underline{r = 3.90\ m}}$$

$$O_{Kugel} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$
$$O_{Kugel} = 4 \cdot 0.62^2 \cdot \pi$$
$$\underline{\underline{O_{Kugel} = 4.84\, m^2}}$$

3) O = 500 m^2

4)

$$V_{Hohlkugel} = V_{Aussenkugel} - V_{Innenkugel}$$
$$V_{Hohlkugel} = \frac{4 \cdot (r_{Aussenradius})^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot (r_{Innenradius})^3 \cdot \pi}{3}$$
$$V_{Hohlkugel} = \frac{4 \cdot (16)^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot (10)^3 \cdot \pi}{3}$$
$$V_{Hohlkugel} = 17157.28 - 4188.79$$
$$\underline{V_{Hohlkugel} = 12968.49\, mm^3} = 12.97 cm^3$$

$$Masse = Dichte \cdot Volumen$$
$$m = \rho \cdot V$$
$$m = 19.29 \cdot 12.97$$
$$\underline{\underline{m = 250.16 g}}$$

Die Hohlkugel aus Gold wiegt genau 250.16 Gramm.

5) *d = 149.13 mm*

6) V_{Ballon} = 244.95 m^3 (r = 5.23 m eines kleinen Ballons)

7) Kartonmenge = 52841.59 mm^2; Schaumstoffmenge 476673.85 mm^3

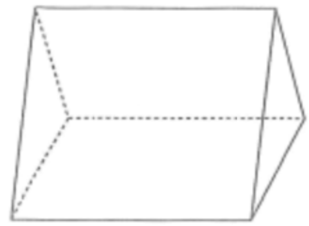
8) d = 4.48 cm

Zusammengesetzte Aufgaben zur Stereometrie

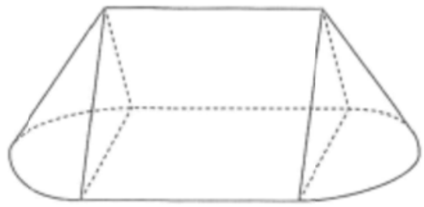
Aufgabe 1

Ein Prisma hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seiten Länge a = 4 cm. Die Höhe des Prismas ist doppelt so groß wie die Grundseitenlänge a.

a) Berechne das Volumen des Prismas.



b) An den beiden Dreiecksflächen werden Kegelhälften (wie aus der Skizze ersichtlich) angesetzt. Dadurch entsteht ein neuer Körper. Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des neuen Körpers.



c) Um wie viel Prozent sind das Volumen und die Größe der Oberfläche des neuen Körpers größer als

Aufgabe 2

Aus einem pyramidenförmigen Holzstück, dessen Grundfläche ein Quadrat mit 10cm Seitenlänge ist und dessen Höhe 15 cm beträgt, soll ein möglichst grosser Kegel geschliffen werden. Welches Volumen wird dabei (mindestens) vom Holzstück abgeschliffen? Welchem Anteil am Volumen des ursprünglichen Holzstückes entspricht das?

Kantonale Fachschaft Mathematik

Musterlösungen zu den zusammengesetzten Aufgaben zur Stereometrie

Aufgabe 1

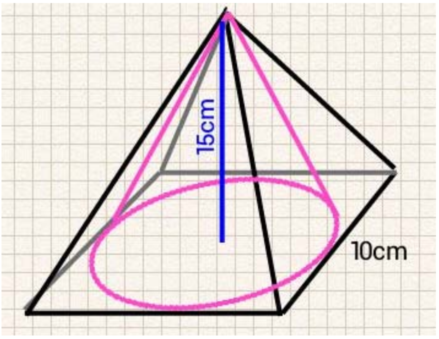
a) $V = Gh = \frac{1}{2}a \cdot h_{Grundfläche} \cdot h_{Prisma} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}4^3 = 32\sqrt{3} \approx 55{,}43\left[cm^3\right]$

b) $V = 32\sqrt{3} + \frac{1}{3}3^2\pi = V_{Prisma} + \frac{1}{3}r^2 \cdot h_{Grundfläche} \cdot \pi = 32\sqrt{3} + \frac{1}{3}2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}2 \cdot \pi = 32\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot \pi$

$\approx 55{,}426 + 7{,}255 \approx \underline{\underline{62{,}68\left[cm^3\right]}}$

c) $\frac{62{,}68}{55{,}43} - 1 \approx 0{,}131 \mathrel{\hat{=}} 13{,}1\%$

Aufgabe 2



$V_P = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}10^2 \cdot 15 = 500\left[cm^3\right]$

$V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi \approx 392{,}7\left[cm^3\right]$

$V_{Abschliff} = V_P - V_K \approx 500 - 392{,}7 = 107{,}3\left[cm^3\right]$

$\frac{V_{Abschliff}}{V_P} = \frac{107{,}3}{500} \approx 0{,}215 \mathrel{\hat{=}} 21{,}5\%$