KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

REPETTITIONSAUFGABEN VEKTORGEOMETRIE 4. KLASSE

Zur Ausgangslage: In der Vektorgeometrie weichen die Stoffpläne der einzelnen Luzerner Mittelschulen kapitelmässig voneinander ab. Daher sind die Repetitionsaufgaben bei dieser Zusammenstellung nach Kapiteltiteln gegliedert. Der Schüler muss sich orientieren, welche Themen er aus der 4.Klasse kennt, welche an seiner Kanti erst in der 5.Klasse vermittelt werden.
Aus den Stoffplänen der einzelnen Kantonsschulen erkennt man entweder einen Aufbau
nach dem Buch „Vektorgeometrie – Heinz Bachmann / Sabe Verlag“ [Kapitel 1+2+5 ohne Kapitel 3+4]
oder
nach dem Skript „Vektorgeometrie – Siegerist/Wirth – K. Wirth, Zürich“ [Kapitel 1−4 ohne Kapitel 5];
evtl. gibt es auch einen lehrerspezifischen Stoffplanablauf, speziell dann, wenn dieselbe Lehrperson von der 4. bis zur 6. Klasse unterrichtet.

KAPITEL 1: **Vektorbegriff, Linearkombination, linear (un)abhängige Vektoren, Betrag**

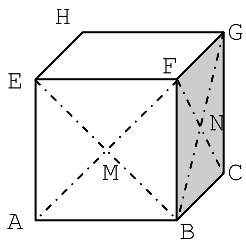
LERNZIELE:

- Definition eines Vektors, Repräsentant;
- Grundoperationen: Vektorsumme, Vektordifferenz, skalare Multiplikation (Streckung);
- Kollineare Vektoren; komplanare Vektoren; Basis in R^2 bzw. R^3;
- Linearkombination von Vektoren; linear abhängige und unabhängige Vektoren.

AUFGABEN ZUM KAPITEL 1:

1. Beschreibe und skizziere die allgemeine Lage der vorkommenden Punkte zueinander, wenn gilt:
   a) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}=\vec{0}$
   d) $\overrightarrow{EF}+2\,\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{EH}$ e) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{UW}=2\,\overrightarrow{UR}$

2. Drücke in einem Parallelogramm ABCD mit Diagonalenschnittpunkt M die folgenden Vektoren als Linearkombination von $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\ und\ \vec{b}=\overrightarrow{AD}$ aus:
   $\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{AM}\ \ und\ \overrightarrow{DM}$.



3. In einem Würfel ABCDEFGH mit den Diagonalschnittpunkten M und N der Seitenflächen ABEF bzw. BCFG sind $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AD}\ und\ \vec{c}=\overrightarrow{AE}$ gegeben.
   Drücke folgende Vektorterme durch die gegebenen Vektoren aus: $\overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{HB},\ \overrightarrow{CH},\ \overrightarrow{FM},\ \overrightarrow{CN},\ \overrightarrow{NM},\ |\overrightarrow{AF}|\ \ und\ \ |\overrightarrow{AG}|$.

4. Gegeben sind drei Punkte durch ihre Ortsvektoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}\ und\ \vec{c}=\overrightarrow{OC}$:
   Drücke als Linearkombination der gegebenen Vektoren den Ortsvektor
   a) $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$ zum Mittelpunkt M der Strecke AB aus.
   b) $\vec{s}=\overrightarrow{OS}$ zum Schwerpunkt S des Dreiecks ABC aus. *Hinweis: S teilt s_a Im Verhältnis 2 : 1.*

5. Beweise: Die Seitenmitten EFGH eines räumlichen Vierrecks ABCD (die 4 Ecken müssen nicht in einer Ebene sein) liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm.
   Hinweis: führe selber geeignete Vektoren ein.

Kantonale Fachschaft Mathematik

LÖSUNGEN ZUM KAPITEL 1:

1. a) *PQRS bilden in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm, da ja gilt* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = -\overrightarrow{RS}$.

b) *C ist der Mittelpunkt der Strecke AB, da* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{CB}$ *gilt.*

c) *E, F und G bilden ein Dreieck mit E=H (Rundgang).*

d) *E, F und H bilden ein Dreieck und G ist der Mittelpunkt der Seite FH.*

e) *U, V und W bilden ein Dreieck und R ist der Mittelpunkt der Seite VW, oder ein halbes Parallelogramm mit Diagonalenschnittpunkt R.*

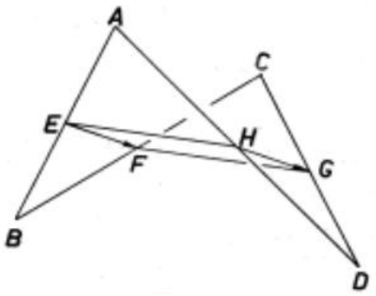
2. $\overrightarrow{CB} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{CA} = -\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

3. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{HB} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{CH} = -\vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{FM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;
$\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $|\overrightarrow{AF}| = |\vec{a}|\sqrt{2}$ $(Quadratdiagonale)$; $|\overrightarrow{AG}| = |\vec{a}|\sqrt{3}$ $(Würfeldiag.)$.

4. a) $\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

b) *Sei N der Mittelpunkt der Seite BC, so* $\vec{n} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;
$\vec{s} = \overrightarrow{OS} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) - \vec{a}\right] = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

5. *Es sei* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ *und* $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$,
sowie E der Mittelpunkt von AB, F den von BC, G den von CD und H den von DA.



$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$
$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d};$$
also $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right) = 0$ *(Rundgang)*
also $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HG}$, *somit ein ebenes Parallelogramm.*

Zweiter eleganterer Lösungsweg: *Es seien* $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ *und* $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ *die Ortsvektoren.*
Dann gilt: $\vec{e} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, $\vec{f} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c},\right)$ $\vec{g} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right)$ *und* $\vec{h} = \frac{1}{2}\left(\vec{d} + \vec{a}\right)$.
zu zeigen: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \cdots = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$, *also gleicher Vektor, nur andere Repräsentanten.*

KAPITEL 2: **Rechnen mit Komponenten, Vektorlänge, kollinear und komplanar, Basis**

LERNZIELE:

- Orthonormierte Basis in R^3: $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;
- Komponenten eines Vektors; Ortsvektor; Koordinaten eines Punktes;
- Rechnen mit den Komponenten: Betrag/Länge eines Vektors; Vektoraddition und –subtraktion; skalare Multiplikation;
- Differenzenvektor; Streckenlänge; Mittelpunkt einer Strecke; Schwerpunkt eines Dreiecks.

AUFGABEN ZUM KAPITEL 2:

6. Von einem Parallelogramm kennt man die Ecken A(−9/1/3), B(−1/3/6) und D(−5/3/−4). Berechne die Koordinaten der Ecke C sowie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M.

7. Bestimme x und z so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}x\\-2\\z\end{pmatrix}$ kollinear sind.

8. Gegeben sind die Punkte A(−7/−2/12) und B(1/14/−4). Die Strecke AB soll durch den Punkt T im Verhältnis 5 : 3 geteilt werden. Bestimme die Koordinaten von T.

9. Liegt der Punkt P(−4/4/−1) auf der Geraden durch A und B?
   a) A(−3/6/1) und B(−1/10/5)   b) A(1/0/−4) und B(6/−4/5)
   Hinweis: ohne Geradengleichung lösbar.

10. Gegeben: A(6/−7/7), B(−2/3/−1), S(2/−3/3). Berechne die Koordinaten der Ecke C für das Dreieck ABC mit Schwerpunkt S.

11. Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix}10\\-10\\5\end{pmatrix}$.
    Welcher Vektor besitzt die Länge 18, hat aber die **entgegengesetzte** Richtung von $\vec{a}$?

12. Von einem Trapez kennt man drei Ecken A(5/2/−3), B(−3/6/5) und C(2/5/7). Berechne die Koordinaten der Ecke D so, dass das Trapez die Seite c=CD der Länge 9 besitzt.

13. Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar?
    a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}8\\7\\6\end{pmatrix}$

14: Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix}-10\\8\\-3\end{pmatrix}$.
   a) Ist $\vec{d}$ eine Linearkombination der drei andern Vektoren?
   b) Wie liegt $\vec{d}$ im Vergleich zu den drei andern Vektoren im Raum?

15. Gegeben sind die zwei Punkte A(9/−2/0) und B(−3/4/4), wobei AB ein Kugeldurchmesser bildet
Berechne die Durchstosspunkte D der Kugel mit der y-Achse.

16. Von einem Drachenviereck kennt man zwei gegenüberliegende Ecken A(5/2/3) und C(−3/−6/3).
Es hat die Ecke B auf der x-Achse und BD als Symmetrieachse. Zudem ist die Ecke D doppelt so weit vom Diagonalenschnittpunkt entfernt wie B.
 a) Bestimme die Koordinaten der Ecken B und D.
 b) Wie gross ist sein Flächeninhalt F?

17. Von einem zylinderförmigen Fass um die z-Achse (Drehachse) kennt man den Punkt A(10/−5/2) der Grundkreislinie (Bodenrand) und den Mittelpunkt M(0/0/22) des Deckelkreises.
Skizziere ihn und berechne danach das Zylindervolumen.

18. Gegeben: A(6/−10/−8) und S(0/40/0).
Von einem geraden Kreiskegel mit Spitze S und Mantellinie AS liegt die Höhe auf der y-Achse.
 a) Berechne das Kegelvolumen.
 b) Welcher Punkt P auf der Kegelhöhe hat von jedem Punkt der Grundkreislinie denselben Abstand wie von der Spitze S?

LÖSUNGEN ZUM KAPITEL 2:

6. $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AD}; C(3/5/-1);\ Mittelpunkt\ von\ BD\ bzw. AC: M(-3/3/2).$

7. $\vec{a} = k\,\vec{b} = 0\ ;\ aus\ 2. Komponentengl.\ folgt: k = -2; dann\ \ x = 1\ \ und\ z = -1.5$

8. $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}\ ;\ \ T(-2/8/2)$

9. $\overrightarrow{AB}\ und\ \overrightarrow{AP}\ kollinear, d.h.\ \overrightarrow{AB} = k\cdot\overrightarrow{AP}\ ?\quad a)\ ja,\ \ k = -2;\ jede\ Komponentengl. muss\ erfüllt\ sein!$
$b)\ nein, denn\ es\ existiert\ kein\ k, das\ jede\ Komponentengl.\ erfüllt!$

10. $Mittelpunkt\ der\ Seite\ AB: M_{AB}(2/-2/3);\ \vec{c} = \overrightarrow{m_{AB}} + 3\,\overrightarrow{M_{AB}S};\ C(2/-5/3);$
oder Formel der Aufgabe 4b) aus Kapitel 1 auflösen: $\vec{c} = 3\vec{s} - \vec{a} - \vec{b}$, *dann komponentenweise rechnen.*

11. $\vec{b} = -\frac{18}{|\vec{a}|}\vec{a} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}; Minus, weil\ entgegengesetzt.$

12. $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = 12;\ \overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix};\ \vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{CD};\ D(8/2/1);$

13. $Prüfe, ob\ es\ ein\ Lösungspaar\ (x, y)\ gibt\ für\ \ \vec{c} = x\cdot\ \vec{a} + y\cdot\vec{b}.$
 a) *aus zwei Komponentengleichungen x und y berechnen und nicht verwendete prüfen;*
 es gibt kein Lösungspaar, also sind die Vektoren nicht komplanar;
 mit gleichem Anfangspunkte würden sie ein Dreibein in R^3 *bilden.*
 b) $(3, -2), d.h. \vec{c} = 3\vec{a}\ - 2\vec{b}\ .$

14. *a)* $Löse\ das\ (3x3) - Gleichungssystem\ \vec{d} = x\cdot\ \vec{a} + y\cdot\vec{b} + z\cdot\vec{c}.\ \ \vec{d} = -2\cdot\vec{b} + 3\cdot\vec{c}.$
 b) $\vec{d}$ *ist komplanar zu* $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$*; nimmt man Repräsentanten mit gleichem Anfangspunkt schaut* $\vec{a}$ *aus der Ebene von* $\vec{b}, \vec{c}$ *und* $\vec{d}$ *heraus.*

15. $M(3/1/2);\ r = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = 7;\ D(0/y/0)\ in\ Gleichung\ \left|\overrightarrow{DM}\right| = 7\ \ einsetzen:$
$\sqrt{3^2 + (1-y)^2 + 2^2} = 7;\ D_1(0/7/0)\ und\ D_2(0/-5/0).$

16. a) *Drachenviereck-Eigenschaft* $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|\ \ mit\ \ B(x/0/0)\ \ nach\ dem\ Quadrieren:$
$(x-5)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 = (x+3)^2 + 6^2 + (-3)^2;\ B(-1/0/0;.$
Diagonalenschnittpunkt=Mittelpunkt M_{AC}*(1/−2/3);*
$\vec{d} = \overrightarrow{m_{AC}} + 2\,\overrightarrow{BM_{AC}};\ D(5/-6/9).$
b) $F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{128}\sqrt{153} \approx 69.97$

17. $Grundkreismittelpunkt\ Z\ besitzt\ dieselbe\ z-Koordinate\ wie\ A: Z(0/0/2).$
$V = r^2\pi h = \left|\overrightarrow{AZ}\right|^2\pi\left|\overrightarrow{ZM}\right| = 125\,\pi\,20 = 2500\pi \approx 7853.98\ .$

18. a) $Grundkreismittelpunkt\ besitzt\ dieselbe\ y-Koordinate\ wie\ A: M(0/-10/0).$
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AM}\right|^2\pi\ h = \frac{1}{3}\,10^2\,\pi\,50 \approx 5235.99$$
b) $P(0/y/0)\ in\ Gleichung\ \left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PS}\right|\ \ einsetzen, quadrierenund\ nach\ x\ auflösen: P(0/14/0);$
Zur Information: P wäre der Mittelpunkt der Umkreiskugel dieses geraden Kreiskegels.

Kapitel 3: **Skalarprodukt, Winkelberechnung und Anwendungen**

LERNZIELE:

- Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren und Deutung der Zahl >0, =0, <0;
- Winkelform $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ zur Berechnung des Zwischenwinkels φ zweier Vektoren;

AUFGABEN ZUM KAPITEL 3:

19. Berechne für jedes Dreieck ABC alle Winkel und die Länge der Schwerlinie s_b:
    a) A(4/1/−1), B(1/−4/0), C(6/−1/5) b) A(2/−3/−4), B(2/−1/1), C(8/3/4)

20. Von welchen Punkten P der x-Achse aus sieht man die beiden Punkte A(3/1/2) und B(5/1/−2) unter einem rechten Winkel?

21. Welche Winkel liegen zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und den Koordinatenachsen?

22. Gegeben: A(2/0/−1) und B(0/2/−2).
    Berechne die Ecke C auf der z-Achse des Dreiecks ABC so, dass der Winkel β=45° beträgt.

23 Von einem Rechteck kennt man die Ecken A(2/−1/10) und D(5/1/6), zudem liegt die Ecke B auf der y-Achse. Bestimme die Ecken B und C.

24. Beweise mit dem Skalarprodukt: Im Rhombus stehen die Diagonalen normal/senkrecht aufeinander.
    Hinweis: es sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

LÖSUNGEN ZUM KAPITEL 3:

19. *Winkelform für α und β; γ=180°– α–β; Seitenmittelpunkt* M_{AC}; $|\vec{s_b}| = |\overrightarrow{AM_{AC}}|$.
$a)\ \alpha = 75.24°;\ \beta = 56.62°;\ \gamma = 48.14°;\ M_{BC}(5/0/2);\ s_b = 6$
$b)\ \alpha = 34.11°;\ \beta = 123.15°;\ \gamma = 22.74°;\ M_{BC}(5/0/0);\ s_b = \sqrt{11} \approx 3.32$

20. $P(x/0/0);\ \overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{BP} = 0$ *ergibt die quadr. Gl.* $x^2 - 8x + 12 = 0;\ P_1(2/0/0)$ *und* $P_2(6/0/0)$.

21. *Mit Winkelform jeden Winkel zwischen* $\vec{a}$ *und* $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *bzw.* $\vec{e_2}$ *bzw.* $\vec{e_3}$ *berechnen.*
$\alpha = 68.58°;\ \beta = 79.48°;\ \gamma = 24.09°$

22. *C(0/0/z);* $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = z + 6;\ |\overrightarrow{BA}| = 3;\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{z^2 + 4z + 8}$;
$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{z+6}{3\sqrt{z^2+4z+8}}$ *quadrieren, mal HN:* $7z^2 + 12z = 0;\ C_1(0/0/0)$ *und* $C_2(0/0/-\frac{12}{7})$;

23. *B(0/y/0);* $\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AB} = 2y + 36 = 0;\ y = -18; B(0/-18/0);\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD};\ C(3/-16/-4)$

24. *Es sei* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. *Im Rhombus gilt:* $|\vec{a}| = |\vec{b}|;\ \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ *und* $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$.
$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2 = komponentenweise = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0.$

Kapitel 4: Vektorprodukt und seine Anwendungen

LERNZIELE:

- Definition des Vektorproduktes zweier Vektoren;
- Anwendung 1: Gesucht eine senkrechte Richtung zu zwei Vektoren;
- Anwendung 2: Gesucht der Flächeninhalt für das von zwei Vektoren aufgespannte Parallelogramm oder Dreieck.

AUFGABEN ZUM KAPITEL 4:

25. Gegeben: 3 Würfelecken A(1/−1/1), B(−1/0/3) und D(3/1/2).
Bestimme die Ecken C und E so, dass die von A ausgehenden Kanten $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\ und\ \overrightarrow{AE}$ in dieser Reihenfolge ein Linkssystem bilden.

26. Gegeben: A(0/4/0) und B(3/0/10).
a) Wo liegt der Punkt A, wo der Punkt B im Koordinatensystem?
b) Der Punkt C auf der positiven x-Achse ist von B doppelt so weit entfernt wie von A.
Berechne vom Dreieck ABC die Ecke C, alle Winkel und den Flächeninhalt F.

27. Auf den positiven Koordinatenachsen befinden sich die drei Punkte A(a/0/0), B(0/a/0) und C(0/0/a).
a) Skizziere das Dreieck ABC im Koordinatensystem. Punkte anschreiben.
b) Berechne die Dreiecksfläche allgemein (ein Term mit der Variablen a).
c) Bestimme das Pyramidenvolumen OABC allgemein.
d) Wie weit ist der O-Punkt vom Dreieck ABC entfernt (allgemein)?

28. Gegeben: A(1/14/8) und B(−1/10/4).
Für welche Punkte C der x-Achse besitzt das Dreieck ABC den Flächeninhalt 18?

29. Gegeben: A(3/−1/5), B(1/3/2) und C(−3/−1/8).
Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide, dessen Spitze S senkrecht zur Dreiecksfläche über dem Punkt A liegt. Das Pyramidenvolumen soll 54 betragen.
Berechne die Koordinaten der möglichen Spitzen S.

30. Liegen die 4 Punkte ABCD in einer Ebene?
a) A(3/0/1), B(4/2/3), C(3/1/−2) und D(4/3/0)
b) A(1/−2/2), B(2/−1/3), C(−1/−1/2) und D(−3/3/4)
Hinweis: Idee für die Vektoren $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ *suchen.*

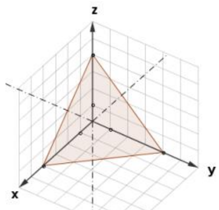
31. Von einem geraden Kreiskegel kennt man den Grundkreismittelpunkt M(3/1/−1) und die Punkte A(−1/5/−3) und B(1/−3/−5) auf der Grundkreislinie.
a) Zeige, dass A und B tatsächlich auf der Grundkreislinie liegen.
b) Berechne die Koordinaten der möglichen Kreiskegelspitzen S so, dass das Volumen des Kreiskegels 108π beträgt.

LÖSUNGEN ZUM KAPITEL 4:

25. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$: *C(1/2/4). Richtung für AE:* $\vec{v} = -\left(\overrightarrow{AD} x \overrightarrow{AB}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ *[Minus wegen Linkssystem]*

oder $\vec{v} = \overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$; *E(0/1/−1).*

26. *a)* *A liegt auf der y-Achse, B in der xz-Ebene.*
b) *1.* $C(x/0/0)$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|$: $\sqrt{(x-3)^2 + 0^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{x^2 + (-4)^2 + 0^2}$;
$x = 3 > 0$; $C(3/0/0)$; *x=−5 fällt nach Voraussetzung weg.*
2. *Skizziert man das Dreieck, so erkennt man γ=90°.*
Alle Winkel auch mit der Winkelform berechenbar: α=63.43° und β=26.57°.
3. $F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right| = 25.$



27. *b)* $F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$;
c) $V = \frac{1}{3}G\,h = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{2}\,a = \frac{a^3}{6}$;
d) *Gesuchter Abstand=Körperhöhe h zur Grundfläche G=ΔABC ;*
zur Info: h verläuft vom Ursprung zum Schwerpunkt S von ABC.
$V = \frac{1}{3}G\,h = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}\,h = \frac{a^3}{6}$; $h = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

28. $\left|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} x-1 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -24 \\ -4x-12 \\ 4x+24 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32x^2 + 288x + 1296} = 2 \cdot 18$ Parallelogramm;
Nach Quadrieren: $32x^2 + 288x = 32x(x+9) = 0$; $C_1(0/0/0)$ *und* $C_2(-9/0/0)$

29. *Pyramidenvolumen* $V = \frac{1}{3}G\,h = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right| h = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}\right| h = 54$; $h = 9.$;
Idee: von Ecke A aus 9 Einheiten senkrecht „nach oben/unten" in Richtung des Vektorprodukts
$\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$ *gehen, gekürzt* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \pm \frac{9}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; *S₁(6/5/11) und S₂(0/−7/−1)*

30. $\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}$ *ist ein Vektor senkrecht auf ΔABC bzw. der Ebene durch A, B und C.*
Liegt D in dieser Ebene, so steht $\overrightarrow{AD}$ *senkrecht auf* $\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}$, *kurz* $\left(\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right)^\circ \overrightarrow{AD} = 0$;
Zur Information: *diese Formel heisst Spatprodukt, wo das Vektor- und das Skalarprodukt vorkommen.*
Für a) und b) gibt es je gleich 0, so dass die vier Punkte je in einer Ebene liegen.
Anderer einfacher Lösungsweg aus Kapitel 2: *gibt es zwei Skalare x und y mit* $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$;
Für a) x=y=1 . *Für b): x=2, y=3*

31. *a)* $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right| = 6$
b) $V = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 \pi\, h = 108\pi$: $h = 9$; *Richtung der Höhe* $\vec{v} = \overrightarrow{MA} x \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} \pm \frac{9}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \pm 3\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; *S₁(−3/−2/5) und S₂(9/4/−7).*

Kapitel 5: **Parametergleichung einer Geraden**

LERNZIELE:

- Parametergleichung einer Geraden $g\colon \vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{v}$; Erkennen von spezieller Lage in R^3.;
- Spurpunkte S_1 mit xy-Ebene, S_2 mit yz-Ebene und S_3 mit xz-Ebene einer Geraden g;
- Normalprojektion einer Geraden g auf eine Koordinatenebene (z.B. Schatten am Boden);
- 4 mögliche Fälle bei der Lage zweier Geraden g und h in Parameterform;
- Abstand „Punkt P – Gerade g(A,B)“: Formel mit Vektorprodukt gebildet aus $\overrightarrow{AB}$ *und* $\overrightarrow{AP}$ statt mit Hilfe des Höhenfusspunktes H im Parallelogramm.

AUFGABEN ZUM KAPITEL 5:

Hinweis: ***Aufgaben, die das Kapitel 3+4 (Skalar- und Vektorprodukt) voraussetzen, sind mit einem Stern * gekennzeichnet!!!***

32. Liegen die Punkte P(−1/3/17) und Q(8/−6/14) auf der Geraden g durch A(4/−2/2) und B(5/−3/−1)?

33. Gegeben: A(−2/−5/6) und B(1/10/6).
Bestimme die Spurpunkte der Geraden g durch A und B? Wie verläuft g im Raum?

34. Berechne je die gegenseitige Lage der Geradenpaare:

a) $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 4.5 \\ -9 \end{pmatrix}$ *und* $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *und* $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *und* $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

d) $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2.5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$.

35. Gegeben: $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k-9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Wie muss k gewählt werden, damit die zwei Geraden g und h
a) parallel sind? b) sich schneiden?

36. Gegeben: zwei Geraden g durch A(−3/−3/18), B(0/−3/14), h durch C(3/−6/10), D(15/−8/−6).
a) Wie verläuft g im Koordinatensystem?
b) Bestimme die drei Spurpunkte von g?
c) Berechne eine Koordinatengleichung *ax+cz+d=0* der Normalprojektion von g auf die xz-Ebene.
d) Wie liegen g und h zueinander?
e)* Wie gross ist der Schnittwinkel φ zwischen den beiden Geraden?

37*. Gegeben: A(−2/2/0) und B(−1/0/2), sowie Gerade $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Gesucht die Punkte P auf der Geraden g so, dass der Winkel PAB=α=45° gilt.

38.* Gegeben: A(2/0/−4), B(1/−1/−8), P(1/−1/1). Berechne für die Gerade g(A,B) den
a) Punkt G auf g mit kürzestem Abstand zu P.
b) den Abstand d(g,P) mit Formel (ohne zuerst G zu bestimmen).

39.* Gegeben: P(5/−1/4), M(1/−3/−1) und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Von einem geraden Kreiszylinder kennt man den Grundkreismittelpunkt M und den Punkt P auf der Deckkreislinie. Seine Achse verläuft in Richtung von $\vec{v}$. Berechne
a) seinen Radius r. b) sein Volumen V.

40.* Gegeben: P(7/1/−2), sowie Gerade g durch A(7/−5/4) und B(9/−7/5).
Von einem geraden Kreiskegel mit Volumen 144π weiss man, dass seine Achse auf g liegt und P ein Grundkreislinienpunkt ist.
Berechne seine möglichen Spitzen S.

LÖSUNGEN ZUM KAPITEL 5:

32. $g{:}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$; P *ja mit* $t = -5$; Q *nein, da kein* t *alle 3 Komponentengleichungen erfüllt.*

33. $g{:}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ *//xy-Ebene, da 2 Komponente des Richtungsvektors=0 ist.*
S_1 existiert nicht wegen dem Verlauf von g; S_2(x=0/5/6); S_3(−1/y=0/6).

34. *1.* *Untersuche, ob Richtungsvektoren kollinear sind. Wenn ja, dann Geraden identisch oder echt parallel; wenn nein, dann sich schneidend oder windschief.*
2. *Identisch, wenn der eine Anfangspunkt die Parametergleichung der andern erfüllt; andernfalls sind sie echt parallel.*
Sich schneidend, wenn nach Gleichsetzen der beiden Gleichungen von g und h mit den zwei Parameter t und s ihre berechneten Werte alle drei Gleichungen erfüllen; andernfalls sind sie windschief.
a) *identisch=zusammenfallend,*
b) *sich schneidend mit t_g=−2 und s_h=−1, sowie Schnittpunkt S(5/3/4).*
c) *windschief verlaufend; aus I und III folgt: t_g=1 und s_h=2, jedoch damit II nicht erfüllt.*
d) *echt parallel.*

35. *a)* $\overrightarrow{v_g} = k\,\overrightarrow{v_h}$, *also* $k = 2$ *nach 2. Komponente.*
b) *Beide Gleichungen gleichsetzen mit Parameter t_g und s_h: k=3; t_g=−1, s_h=5; S(5/6/4)*

36. *a)* $g{:}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 18 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ *// xz-Ebene, da 2. Komponente des Richtungsvektors von g =0 ist.*
b) *S_1(10.5/−3/z=0); S_2(x=0/−3/14); S_3 existiert nicht, da g // xz-Ebene.*
c) *2. Komponentengleichung weglassen und im Gleichungssystem mit x und z den Parameter t wegschaffen:* $\left|\begin{matrix} x = -3 + 3t \\ z = 18 - 4t \end{matrix}\right|$; *Normalprojektion: 4x+3z−42=0.*
d) $h{:}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$;
Beide Gleichungen gleichsetzen (da keine kollineare Richtungsvektoren) mit den Parametern s und t; aus II folgt: s_h=−3 in I: t_g=−4, dann III überprüfen; Schnittpunkt: S(−15/−3/34).
*e)** *Winkelform für beide Richtungsvektoren:* $\varphi = 5.71°$.

37. $P(t/1+t/4-t)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right| = 3$; $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\begin{pmatrix}t+2\\t-1\\4-t\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3t^2-6t+21}$;

$cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-3t+12}{3\ \sqrt{3z^2-6t+21}}$ $quadrieren, mal\ HN$: $t^2+10t-11=0$; $t_1 = 1\ und\ t_2 = -11$;

$P_1(1/2/3)$ und $P_2(-11/-10/15)$.

38.* a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $G(2+t/t/-4+4t)$; $\overrightarrow{PG} \circ \overrightarrow{AB} = 0$: $t = 1$; $G(3/1/0)$.

b) $d(g,P) = Parallelogrammshöhe = \frac{F}{G} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}} = 3.$

39.* a) *Zentrum der Deckkreislinie Z auf der Geraden g(M,* $\vec{v}$*)*: $Z(1+t/-3+2t/-1+2t)$;

$\overrightarrow{PZ} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix}t-4\\2t-2\\2t-5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$: $t = 2$; $Z(3/1/3)$; $r = \left|\overrightarrow{PZ}\right| = 3$.

b) $h = \left|\overrightarrow{MZ}\right| = 6$; $V = r^2\pi\ h = 54\pi \approx 169.65$.

40.* *Grundkreismittelpunkt M auf der Geraden* $g(A, \overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{AB})$: $M(7+2t/-5-2t/4+t)$;

$\overrightarrow{PM} \circ \overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix}2t\\-2t-6\\t+6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 0$: $t = -2$; $M(3/-1/2)$; $r = \left|\overrightarrow{PM}\right| = 6$; $h = \frac{3V}{r^2\pi} = 12$.

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} \pm \frac{12}{\left|\overrightarrow{v_g}\right|}\overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \pm \frac{12}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; *$S_1(11/-9/6)$ und $S_2(-5/7/-2)$.*